Un modèle financier continu en temps

Tarik Chakkour

Un modèle financier continu en temps

Chakkour Tarik (Doctorant dans l'équipe Analyse, phénomènes stochastiques et applications)
Laboratoire de Mathématique de Bretagne Atlantique, Université Bretagne Sud, Vannes.

Résumé

On construit un modèle financier continu en temps, qui est conçu pour être utilisé par des institutions publiques. Ce modèle est basé sur des mesures définies sur un intervalle de temps pour décrire certaines quantités financières comme l'emprunt, le remboursement et les intérêts de paiement. Ce modèle utilise des opérateurs mathématiques pour décrire les liens existant entre ces quantités. La cohérence du modèle par rapport à la réalité est illustrée par des exemples et sa cohérence mathématique est validée. Ensuite, le modèle est utilisé sur des exemples simplifiés afin de montrer sa capacité à être utilisé pour prévoir les conséquences d'une décision ou à définir une stratégie financière.

Introduction

• **Avant : Un modèle discret de planification financière pluriannuelle** :
– est conçu par la société MGDIS pour élaborer un budget annuel.
– génère des résultats sous forme de tableaux.
– est restrient sur un ensemble fini de valeurs.
– n'est pas fléxible.
• **Objectif** : Il était nécessaire de concevoir un modèle utilisant un autre paradigme.
– Ce nouveau modèle se base sur une modélisation en temps continu et utilise des outils mathématiques de types convolution et intégration.
– L'intérêt de passer à la modélisation en temps continu est de pouvoir répondre à un besoin immédiat du marché et ainsi apporter rapidement un avantage concurrentiel au sein de MGDIS.

1 Un modèle financier à taux d'emprunt fixe

α : le taux d'intérêt.
$\tilde{\gamma}$: le pattern de remboursement, qui décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0, elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma} = 1.$$

$\tilde{\kappa}_E$: la mesure d'emprunt de capital. $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$: la mesure de remboursement de capital. Elles sont liées par un operateur de convolution :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} = \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}.$$

$\tilde{\rho}_I$: la mesure de paiement d'intérêts dont la densité est définie par :

$$\rho_I(t) = \alpha \mathcal{K}_{RD}(t).$$

$\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}$: la mesure de remboursement de la dette qui satisfait :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{+\infty} \tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathrm{I}}).$$

$\mathcal{K}_{RD}$: le capital restant dû dont l'évolution en temps est modélisé par l'EDO :

$$\frac{d\mathcal{K}_{RD}}{dt} = \kappa_E(t) - \rho_{\mathcal{K}}(t) - \rho^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}(t).$$

$\tilde{\beta}$: la mesure de dépense isolée liée à un projet. $\tilde{\sigma}$: la mesure de dépense algébrique. $\tilde{\sigma}_g$: la mesure des dépenses courantes. L'équation d'équilibre s'exprime :

$$\tilde{\kappa}_E = \tilde{\sigma} + \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_I.$$

2 Un modèle financier à taux variable

Si, on considère que la fonction α dépends du temps t, le modèle devient un modèle financier à taux variable :

$$\rho_I(t) = \alpha(t)\mathcal{K}_{RD}(t).$$

Dans ce cas, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est lié à la densité d'emprunt en utilisant le pattern de remboursement γ par l'EDO :

$$\frac{d\mathcal{K}_{RD}(t,s)}{dt} = -\gamma(t-s)\kappa_E(s).$$

Les modèles financiers à taux variables se répartissent en deux catégories :
• Un modèle à taux d'emprunt fixe où le taux auquel une somme empruntée sera remboursée est défini à la date d'emprunt. La densité de paiement d'intérêt est :

$$\rho_I(t) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\kappa_E(s)\,ds - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t}\left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\sigma} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\gamma(\sigma-s)\kappa_E(s)\,ds\right)d\sigma + \rho^{\mathrm{I}}_I(t).$$

• Un modèle à taux d'emprunt variable où le taux auquel une somme empruntée sera remboursée est défini à la date d'emprunt. La densité de paiement d'intérêt est :

$$\rho_I(t) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s,t)\kappa_E(s)\,ds - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t}\left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\sigma} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s,t)\gamma(\sigma-s)\kappa_E(s)\,ds\right)d\sigma + \rho^{\mathrm{I}}_I(t),$$

où, ρ^{I}_I est la densité de paiment d'intérêt et $\alpha_{\mathrm{SAB}}(s,t)$ le taux d'intérêt défini à l'instant t associé à une somme empruntée à l'instant s.

3 Simulations numériques du modèle financier à taux d'emprunt fixe

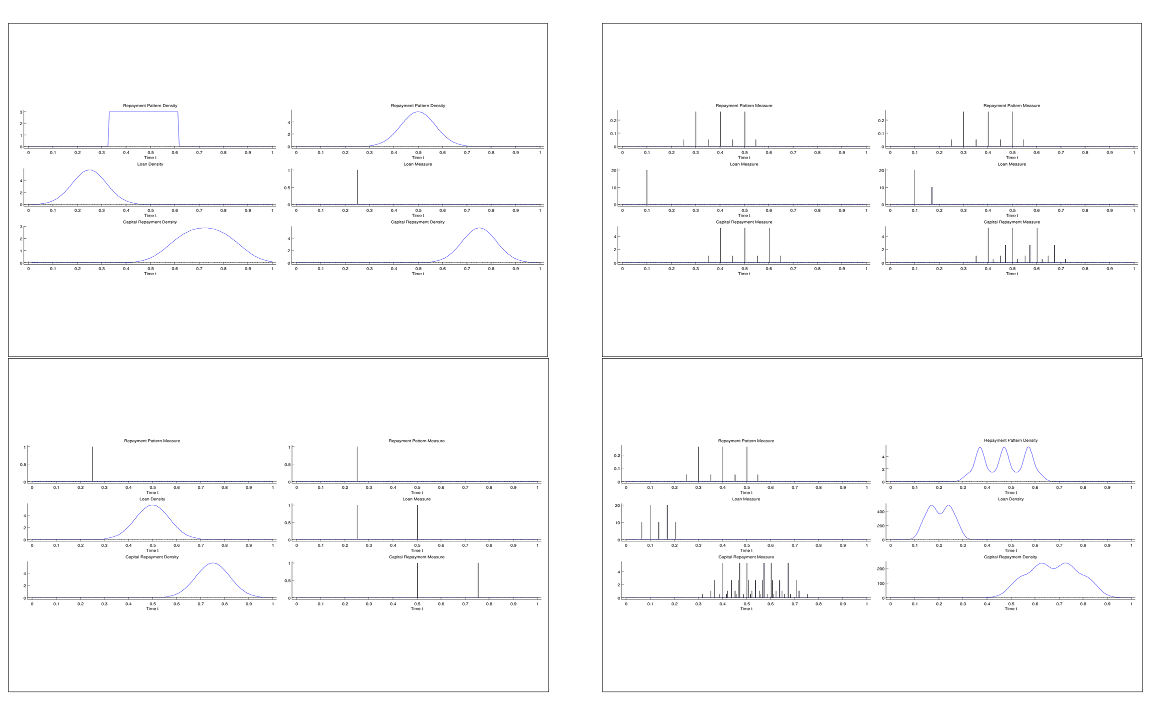

FIGURE 1: Simulation de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ en fonction de l'emprunt κ_E et pattern γ

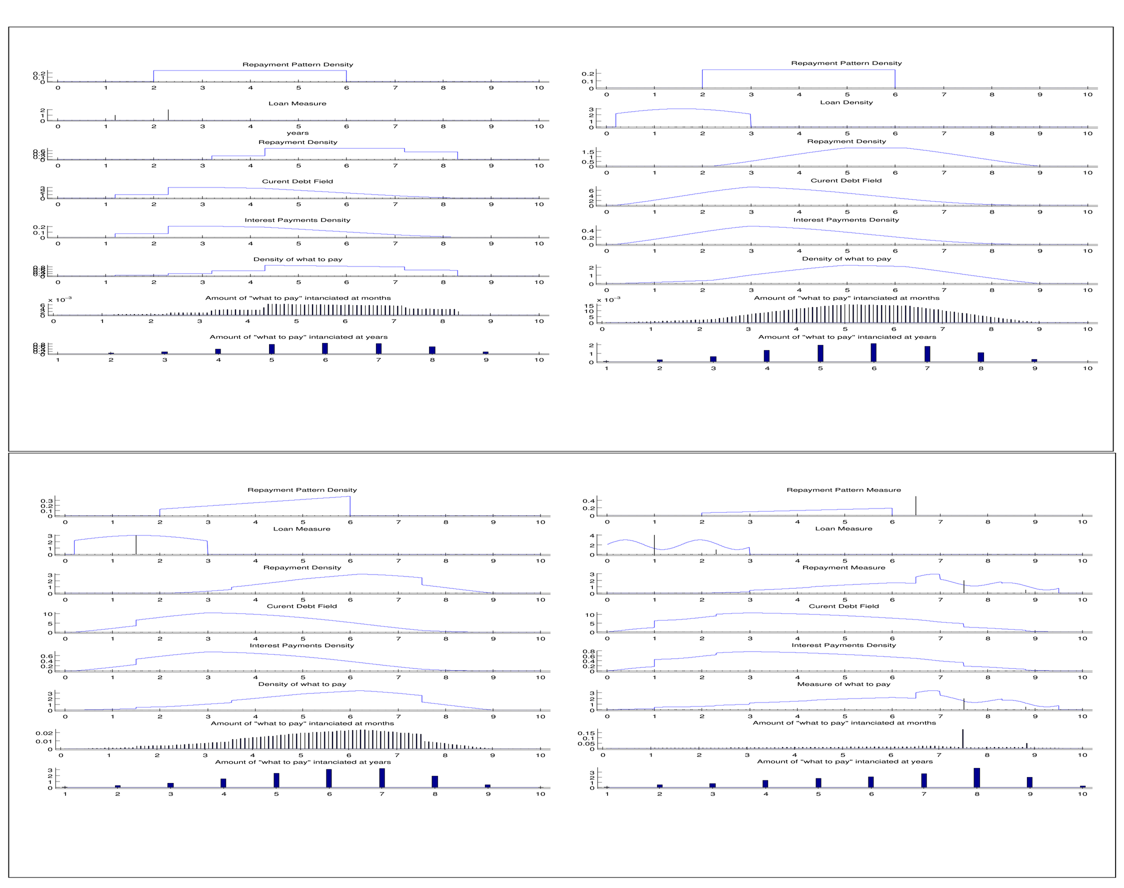

FIGURE 2: Simulation de $\rho_{\mathcal{K}}$, ρ_I, $\mathcal{K}_{RD}$ en fonction de l'emprunt κ_E et pattern γ

4 Stratégie financière du modèle financier à taux d'emprunt fixe

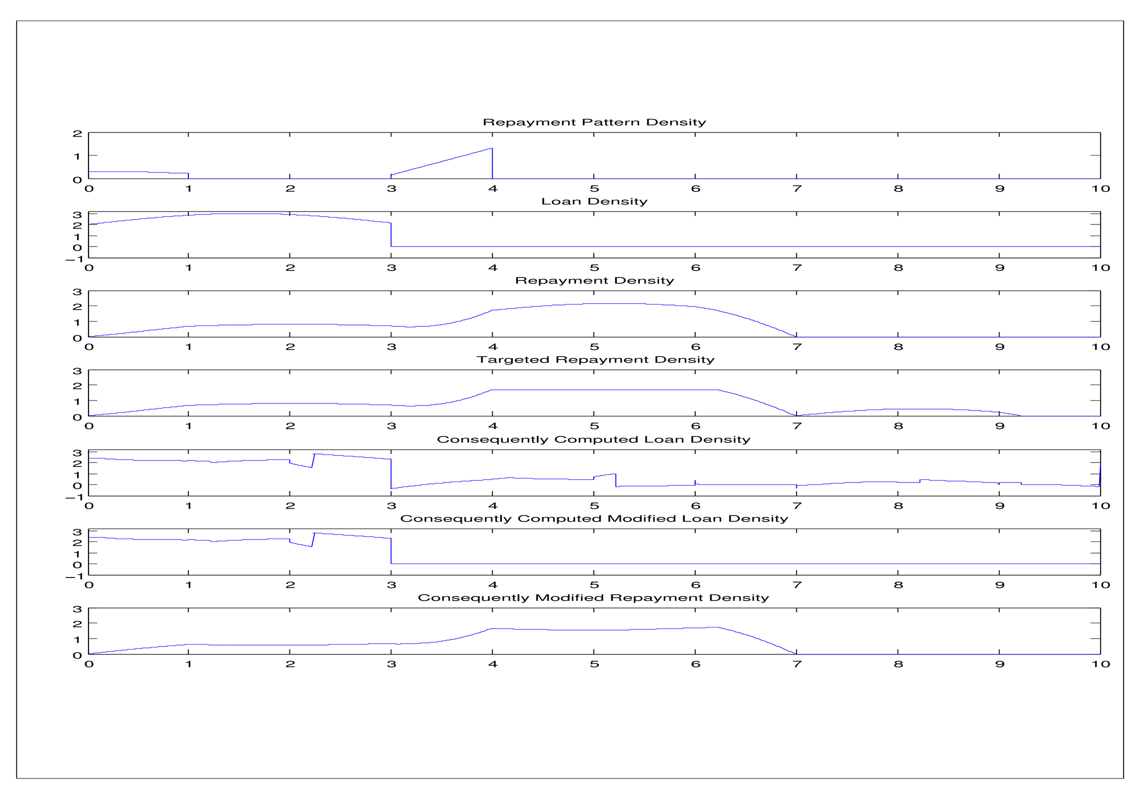

FIGURE 3: Stratégie financière de l'emprunt en modifiant la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$

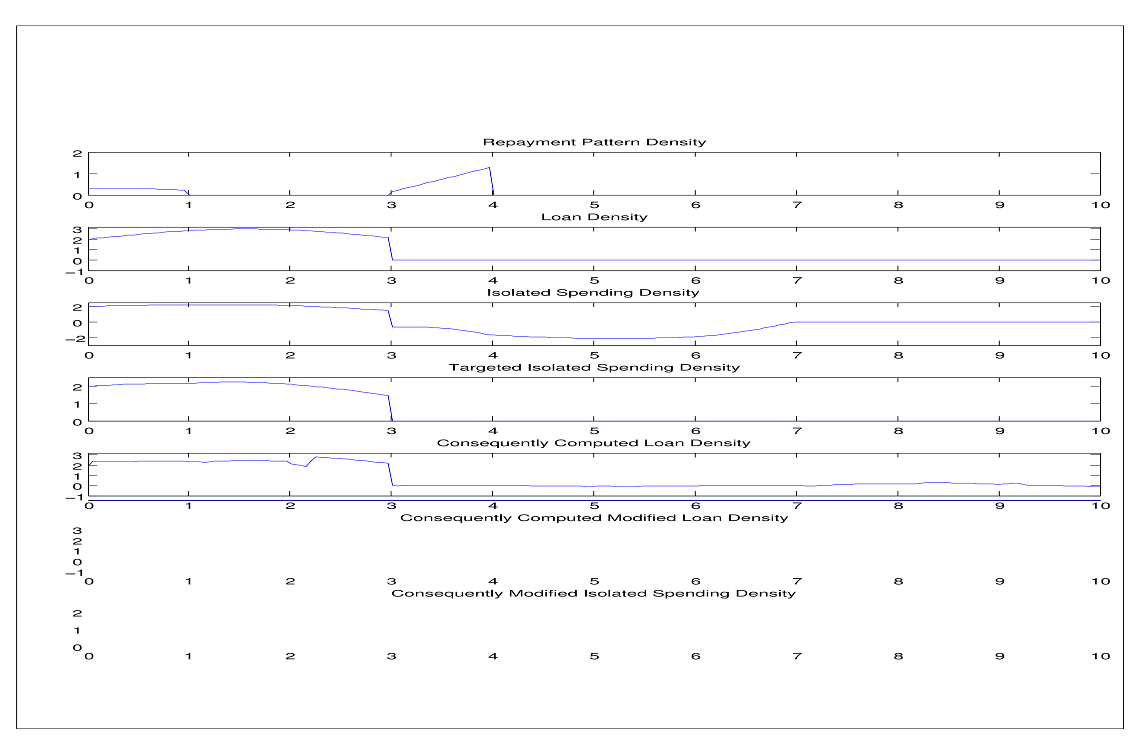

FIGURE 4: Stratégie financière de l'emprunt en modifiant la densité de dépense isolée β